Analyse pour l'ingénieur

Sylvain Meignen

Transcrit par Julien Henry

Ce cours n'est pas un polycopié officiel. Aussi, il n'est pas certifié sans erreurs. Pour toute remarque ou correction, vous pouvez me contacter à l'adresse

julien.henry@ensimag.imag.fr

2008-2009

École Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées, Grenoble

Table des matières

Chapitre I

Théorie de la mesure et intégration

On a besoin de définir dans un premier temps la droite numérique "achevée" : $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}_+}, x + (+\infty) = +\infty$$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}_+}, x \times (+\infty) = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right.$$

1. Définition de mesure et d'ensembles mesurables

Définition 1. *Une tribu sur $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ est une famille $\mathcal{B}$ de parties de $\mathbb{R}^N$ vérifiant les propriétés suivantes :*
- $\varnothing \in \mathcal{B}$
- *Si $A \in \mathcal{B}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{B}$*
- *$\mathcal{B}$ est stable par réunion dénombrable ($\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable).*

Définition 2. *Si $\mathcal{B}$ désigne une tribu de $\mathbb{R}^N$, alors les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés les ensembles mesurables.*

Définition 3. *Une mesure positive μ sur $\mathcal{B}$ est une application (non constante à $+\infty$) de $\mathcal{B}$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ dénombrablement additive, c'est-à-dire quel que soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties disjointes de $\mathcal{B}$ on a la propriété :*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n)$$

Exemples

(1) **La tribu des Boréliens** : la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^N$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^N$ (ou la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^N$). On peut montrer qu'elle est engendrée par des pavés de $\mathbb{R}^N$ définis par :

$$\prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$$

On définit alors la mesure de Lebesgue pour le pavé A par

$$\mu(A) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$$

(2) Mesure sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X). Il est simple de voir que $\mathcal{A}$ est une tribu.

– Mesure de comptage : soit $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \text{card}(A)$$

– Mesure de Dirac : soit $a \in \mathcal{A}$

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \mu(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in A \\ 0 \text{ si } a \notin A \end{cases}$$

Propriété 1:
On a les propriétés suivantes pour les tribus

1. *La mesure de l'ensemble vide est nulle :*
$$\mu(\varnothing) = 0$$
2. *La mesure est croissante pour l'inclusion :*
$$A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$$
3. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}$, on a :*
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$
4. *Enfin, on a l'égalité :*
$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Démonstration Les propriétés 1 et 3 sont immédiates.
Preuve de la 2.

$$B = A \cup (B \setminus A) \Longrightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

Preuve de la 4. Comme $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$, par la propriété 3 on déduit que

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus (A \cap B))$$

De même, comme $B = (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)$, on déduit

$$\mu(B) = \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \cap B)$$

En ajoutant les deux expressions précédentes, on obtient :

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

On a donc le résultat. □

2. Intégration des fonctions positives

2-a. Propriétés élémentaires

On suppose que l'on dispose de l'espace mesuré $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mu)$

Définition 4. *une fonction $f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[$ est étagée (ou simple) si elle prend un nombre fini de valeurs $a_1, \ldots, a_k < +\infty$ et si $B_i = f^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{B}$*

Définition 5. *Une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est dite mesurable si l'image réciproque de tout intervalle de $\overline{\mathbb{R}_+}$ appartient à $\mathcal{B}$.*

Théorème 1:
Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}_+}$ une fonction mesurable, alors f est la limite croissante d'une suite de fonctions étagées f_n tel que :
- $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$
- $f_n(x) \leq f(x)$
- $f_n(x) \geq 0$

Démonstration On cherche à construire une suite f_n vérifiant les propriétés précédentes.
On définit pour $i \in [1, n2^n]$ les ensembles

$$E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}])$$

$$F_n = f^{-1}([n, +\infty])$$

Les ensembles $E_{n,i}$ et F_n sont mesurables (comme image réciproque d'un intervalle par une fonction mesurable).

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + n\chi_{F_n}(x)$$

- Montrons d'abord que f_n tend vers f. $\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall n \in \mathbb{N}, \exists E_{n,i_n}$ un ensemble tel que

$$\begin{aligned} x \in En, i_n \quad &\Longrightarrow \quad f(x) \in [\frac{i_n - 1}{2^n}, \frac{i_n}{2^n}], \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Longleftrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

  donc $f_n(x) \to f(x)$
- Montrons que f_n est croissante, c'est-dire que $\forall x \in E_{n,i}, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$

$$E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}[)$$

$$E_{n+1,2i} = f^{-1}([\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}[) = f^{-1}([\frac{i-\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{i}{2^n}[)$$

$$E_{n,i} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^{n+1}}, \frac{i-\frac{1}{2}}{2^n}[)$$

  $\forall x \in E_{n,i}$,

$$f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n,i}}(x)$$

$$f_{n+1}(x) = \frac{i-1}{2^n}\chi_{E_{n+1,2i-1}}(x) + \frac{i-\frac{1}{2}}{2^n}\chi_{E_{n+1,2i}}(x)$$

$$\begin{cases} si\ x \in E_{n+1,2n-i} \cap E_{n,i}, f_n(x) = f_{n+1}(x) \\ si\ x \notin E_{n+1,2n-i} \cap E_{n,i}, f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \end{cases}$$

□

Définition 6. *Si $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ est une fonction étagée de valeur $a_1, \ldots, a_n$, et si on note $A_i = S^{-1}(a_i)$, alors on définit*

$$\int_{\mathbb{R}^N} S d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

- *Si $f : \mathbb{R}^N \to \overline{R_+}$ est mesurable, on définit l'intégrale par rapport à μ comme l'élément de $[0, +\infty]$ donné par la formule suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \ d\mu = \sup_s \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} s \ d\mu, / s \text{ est étagée}, s \leq f \right\}$$

– *Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est mesurable alors*

$$\int_E f\ d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f\ \chi_E\ d\mu$$

Propriété 2:
Si $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ sont mesurables et si $f \leq g$ alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\ d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g\ d\mu$$

Démonstration Si S étagée et $S \leq f$ alors

$$\begin{aligned} S \leq g \Longrightarrow & \int_{\mathbb{R}^N} S\ d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g\ d\mu \quad \text{(définition de l'intégrale de } g\text{)} \\ \Longrightarrow & \int_{\mathbb{R}^N} f\ d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g\ d\mu \quad \text{(on prend le sup sur } s \text{ dans le membre de gauche)} \end{aligned}$$ □

Propriété 3:
Si s et t sont étagées on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (s+t)\ d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} s\ d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} t\ d\mu$$

Démonstration

$$\int_{\mathbb{R}^N} s\ d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)\ avec\ A_i = s^{-1}(\{a_i\})$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} t\ d\mu = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(B_i)\ avec\ B_i = t^{-1}(\{b_i\})$$

Montrons que $s+t$ est étagée : on sait que $\forall i \neq j,\ B_i \cap B_j = \varnothing\ \ et\ A_i \cap A_j = \varnothing$
$s+t$ est égale à $a_i + b_j$ sur $A_i \cap B_j$
$(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'}) = \varnothing$ sauf si $i' = i$ et $j' = j$
D'autre part :

$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \mathbb{R}^N$$

De cela on peut déduire que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (s+t) d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} s d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} t d\mu \end{aligned}$$ □

2-b. Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Levi

Théorème 2:
Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables de $\mathbb{R}^N$ dans $\overline{R_+}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} f_n\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}\lim_{n\to+\infty} f_n\, d\mu \leqslant +\infty$$

Dans notre cas, si f_n est mesurable, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable.

Corollaire 1:
Le théorème de Beppo-Levi permet d'aboutir aux résultats suivants :

1. *Si $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ sont mesurables et si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$$

2. *Soit $f_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ pour tout n, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu$$

Démonstration 1. Soit S_n étagée, $S_n \to f$, $S_n \leq f$, S_n croissante. Soit T_n étagée, $T_n \to f$, $T_n \leq f$, T_n croissante. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha S_n + \beta T_n d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} S d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^N} T d\mu$$

Alors par convergence monotone sur les 3 termes,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu + \beta \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$$

2. On considère $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$, S_N croissante. Alors d'après le théorème de convergence monotone :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} S_n d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}\lim_{n\to+\infty} S_n d\mu \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}^N}\sum_{n=1}^{N} f_n d\mu$$

On a donc bien le résultat. □

2-c. Ensemble négligeable - Propriété vraie presque partout

Définition 7. *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable. Si $\mu(A) = 0$ on dit que A est négligeable (pour la mesure μ)*

Exemple Voici deux exemples d'ensembles négligeables :
- $\mathbb{Q}$ négligeable dans $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue ($\mathbb{Q}$ dénombrable)
- K (ensemble de Cantor) est négligeable pour la mesure de Lebesgue dans $[0, 1]$

Remarque Dénombrable $\Longleftrightarrow$ il existe une bijection de cet ensemble dans $\mathbb{N}$ ∗

Définition 8. *Soit $P(x)$ une propriété faisant intervenir les points x de $\mathbb{R}^N$. on dit que P est vraie presque partout si $\{x,\ P(x)\ est\ fausse\}$ est négligeable.*

Théorème 3:
Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On a :

1. $$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0 \text{ presque partout}$$
$$(f(x) = 0 \text{ pour presque tout } x)$$

2. $$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu < +\infty \Longrightarrow f < +\infty \text{ presque partout}$$
$$(f(x) < +\infty \text{ pour presque tout } x)$$

DÉMONSTRATION 1. $\Leftarrow$
$A = \{x,\ f(x) \neq 0\}$ et on sait $\mu(A) = 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_* \ f(x) \leq \lim_{n\to+\infty} n\chi_A(x)$$

Soit $f_n(x) = n\chi_A(x)$ croissante, > 0, on déduit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} n\ \chi_A(x)d\mu &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} n\chi_A(x)d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} n \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x)d\mu = 0 \end{aligned}$$

Ceci par linéarité et car $\mu(A) = 0$. Comme on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} n\chi_A(x)d\mu = 0$$

alors cela prouve que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)d\mu = 0$$

On a donc déjà montré une implication. □

DÉMONSTRATION 1. $\Rightarrow$
On suppose que $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0$ et $A = \{x,\ f(x) \neq 0\}$, on a donc

$$\chi_A(x) \leq \lim_{n\to+\infty} n\ f(x)$$

or $g_n(x) = nf(x)$ est croissante. Le théorème de convergence monotone donne alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} nf(x)d\mu = \lim_{n\to+\infty} n \int_{\mathbb{R}^N} f(x)d\mu = 0$$

Donc on obtient la relation :

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} nf(x)d\mu = 0$$

D'où finalement

$$\mu(A) = 0$$

On a donc bien f nulle presque partout. □

DÉMONSTRATION 2.
On suppose $\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu < +\infty$, et on pose $A = \{x,\ f(x) = +\infty\}$. On cherche a montrer que $\mu(A) = 0$. Si $\mu(A) \neq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \geq \int_A f d\mu = +\infty \times \mu(A)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } \mu(A) = 0 \\ +\infty \text{ si } \mu(A) \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{ si } \mu(A) \neq 0 \ \Rightarrow \ \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = +\infty$$

Ainsi, $f < +\infty$ presque partout. □

3. Fonctions intégrables

Définition 9. *Soit* $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *,* f *est mesurable si et seulement si l'image réciproque de tout intervalle de* $\overline{\mathbb{R}}$ *est mesurable.*

Définition 10. *Soit* $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction mesurable. On pose*

$$\left\{ \begin{array}{l} f_+(x) = max(f(x), 0) \\ f_-(x) = min(f(x), 0) \end{array} \right.$$

On a $f_+ + f_- = f$*. On dit que* f *est intégrable si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < +\infty$$

Et alors on pose

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$$

Démonstration Cette définition est cohérente : supposons $f = g - h$ avec g et $h \geq 0$, alors

$$\int g < +\infty \text{ et } \int h < +\infty$$

On sait que $g > f_+$ et $h < f_-$. On va montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu$$

En effet, on a $f = g - h = f_+ + f_- \Rightarrow r = g - f_+ = h - f_- \geq 0, r \leq g$ donc comme g est telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g d\mu < +\infty \text{ , on a : } \int_{\mathbb{R}^N} r d\mu < +\infty$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_+ + r = g \\ f_- + r = h \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (f_+ + r) d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} (f_- + r) d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu \\
&\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} r d\mu \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} r d\mu
\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} h d\mu$$

La définition est donc cohérente. □

Proposition 1:
Voici quelques propositions concernant les fonctions intégrables.

1. *L'ensemble des applications intégrables de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ par pour la mesure de Lebesgue est un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ et l'application suivante est une forme linéaire :*
$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \end{array}$$
2. *Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ alors si $f \leq g$ on a*
$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$$
3. *Soit $f, g : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables avec $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ alors*
$$|f| \leq g \Longrightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$$
4. *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable*
$$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$$
5. *Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, on a*
$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu$$

DÉMONSTRATION 1.
$$\int_{\mathbb{R}^N} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \text{ (c'est trivial...)}$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} f + g d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$$
$$\left\{ \begin{array}{l} f = f_+ + f_- \\ g = g_+ + g_- \end{array} \right. \Longrightarrow f + g = (f_+ + g_+) - (f_- = g_-)$$
On peut passer à l'intégrale :
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (f+g) d\mu &= \int_{\mathbb{R}^N} (f_+ + g_+) d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} (f_- = g_-) d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} g_+ d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} g_- d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \end{aligned}$$

2. Montrons que :
$$f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$$
$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} f = f_- + f_+ \\ g = g_- + g_+ \end{array} \right. &\Longrightarrow f \leq g \Rightarrow f_+ + g_- \leq g_+ + f_- \\ &\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} g_- d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g_+ d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu \\ &\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu \end{aligned}$$

3. $f_+ \leq |f| \leq g$
$f_- \leq |f| \leq g$
si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} g d\mu < +\infty$ alors :
$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu < +\infty \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < +\infty \end{array} \right\} f \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

4. $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, d'après 3) $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < +\infty$$

$$|f| = f_+ + f_- \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f_+ d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} f_- d\mu < \infty$$

5. Cette preuve est laissée à titre d'exercice.

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu$$

Les propositions sont démontrées. □

Définition 11. *Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, donc*

$$\exists f_1, f_2 : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}, f = f_1 + i f_2$$

On a alors les définitions suivantes :

$$\begin{array}{lcl} f \text{ est } \textbf{mesurable} & \Leftrightarrow & f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont mesurables.} \\ f \text{ est } \textbf{intégrable} & \Leftrightarrow & f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont intégrables.} \end{array}$$

De plus, on a ces trois propriétés :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} f_1 d\mu + i \int_{\mathbb{R}^N} f_2 d\mu$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f + g| d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu + \int_{\mathbb{R}^N} |g| d\mu$$

3-a. Intégration sur un sous ensemble

Définition 12. *Soit $A \in \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable et soit $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On note*

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_A(x) d\mu = \int_A f d\mu$$

On note $L^1(A)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur A.

Remarque Si $f = g$ presque partout et si l'une est intégrable alors l'autre est intégrable.

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$$

DÉMONSTRATION

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu < +\infty$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} f - g d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f - g| d\mu = 0 \text{ car } f - g = 0 \text{ presque partout}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} g d\mu$$

Donc g est intégrable. □

Remarque Si f ets mesurable et est non nulle seulement sur un ensemble de mesure nulle A ($f(x) = 0$ si $x \notin A$) alors son intégrale est nulle.

DÉMONSTRATION

$$f = 0 \text{ presque partout } \Rightarrow |f| = 0 \text{ presque partout} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = 0$$

f est d'intégrale nulle. □

Exemple χ_K vérifie ces critères. *

3-b. Intégration d'une fonction mesurable définie presque partout

Définition 13. *Soit f mesurable définie presque partout sur $\mathbb{R}^N$. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N, \mu(A) = 0$ et tel que f est définie sur $\mathbb{R}^N \backslash A$. Posons :*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}^N \backslash A \\ 0 \text{ si } x \in A \end{cases}$$

Alors si $\widetilde{f}$ est intégrable, alors tout autre prolongement de f à $\mathbb{R}^N$ l'est aussi, et l'intégrale est la même. Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f} d\mu$$

Théorème 4:
THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE DE LEBESGUE
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ presque partout. Si $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ tel que $|f_n| \leq g$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f| d\mu = 0$$

DÉMONSTRATION :On définit les deux ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{x, f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \\ B &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{x, |f_n(x)| > g(x)\} \end{aligned}$$

Si on note $C = A \cup B$, on a $\mu(A) = 0$ et $\mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(C) = 0$. On définit

$$\widetilde{f_n}(x) = \begin{cases} f_n(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}^N \backslash C \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}^N \backslash C \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}^N \backslash C \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

on pose alors

$$g_n(x) = \left|\widetilde{f_n}(x) - \widetilde{f}(x)\right|$$

et on considère

$$h_n(x) = \sup_{k\geq n} g_k(x)$$

$h_n(x)$ est décroissante, on va donc essayer de se ramener a une suite croissante. On sait que ($h_n \geq 0$).

$$\forall x, |\widetilde{f_n}(x) - \widetilde{f}(x)| \leq 2\widetilde{g}(x) \text{ (revoir la définition de C)}$$

On peut alors définir

$$\widetilde{h_n}(x) = 2\widetilde{g}(x) - h_n(x)$$

Donc $\widetilde{h_n} \geq 0$ et $\widetilde{h_n}$ croissante. De plus, $\widetilde{h_n}$ est définie sur $\mathbb{R}^N$. Ainsi, on peut appliquer le théorème de convergence monotone à $\widetilde{h_n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (2\widetilde{g} - h_n)\ d\mu &= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} 2\widetilde{g} - h_n\ d\mu \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{g}\ d\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{g} d\mu - \int_{\mathbb{R}^N} h_n\ d\mu \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{g} d\mu - \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h_n\ d\mu
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h_n\ d\mu = 0$, ce qui équivaut à

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \sup_{k\geq n} |\widetilde{f}_k - \widetilde{f}|\ d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{f_n} - \widetilde{f}|\ d\mu = 0$$

Comme $\widetilde{f_n}(x) - \widetilde{f}(x) = f_n(x) - f(x)$ presque partout, on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f|\ d\mu = 0$$

Le résultat est démontré. □

Théorème 5:
Application du théorème de convergence dominée
Soit $(f_n) \in \mathcal{C}^0([a,b])$ qui converge uniformément vers f. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n\ d\mu = \int_{[a,b]} f\ d\mu$$

Démonstration f_n converge uniformément vers f, donc f_n converge presque partout vers f. On montre que les f_n sont majorés par une fonction Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$. Comme f_n converge uniformément vers f, alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, ||f_n - f||_{\infty_{[a,b]}} \leq 1 \ et\ ||f||_{\infty_{[a,b]}} = c$$
$$\Rightarrow \forall n \geq N, ||f_n||_{\infty_{[a,b]}} \leq 1 + c$$

Par ailleurs, $||f_n||_{\infty_{[a,b]}} = c_n$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||f_n||_{\infty_{[a,b]}} \leq \max(1+c, c_1, \ldots, c_{N-1})$$

donc par définition de $||.||_\infty$:

$$\forall x \in [a,b], f_n(x) \leq \max(1+c, c_1, \ldots, c_{N-1})\chi_{[a,b]}(x) \in \mathcal{L}^1([a,b])$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée et on trouve alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n\ d\mu = \int_{[a,b]} \lim_{n\to+\infty} f_n\ d\mu = \int_{[a,b]} f\ d\mu$$

L'application est démontrée. □

Théorème 6:
Si $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, alors l'intégrale de Lebesgue de f sur $[a,b]$ est égale à l' intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$.

DÉMONSTRATION Il existe deux démonstrations possibles.

1. Il suffit de démontrer que les fonctions en escalier sont mesurables, que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction en escalier est égale à l'intégrale de Riemann d'une fonction en escalier. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n\ dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_n\ d\mu$$

Or on a déjà $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n\ dx = \int_a^b f\ dx$, reste à savoir si on a bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_n\ d\mu = \int_{[a,b]} f\ d\mu$. On sait déjà que $f_n \longrightarrow f$ simplement, donc presque partout. Il suffit alors de montrer que f_n est dominée. Or,

$$\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, ||f_n||_\infty \leq ||f||_\infty + 1$$

donc

$$f_n(x) \leq (||f||_\infty + 1)\chi_{[a,b]}(x) \in \mathcal{L}^1([a,b])$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_n\ d\mu = \int_{[a,b]}\lim_{n\to+\infty} f_n\ d\mu = \int_{[a,b]} f\ d\mu$$

2. Pour une deuxième démonstration, voir le poly de cours. □

Exemple Montrons que la fonction f définie par $t \longmapsto f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2}\ d\mu$.

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)\ d\mu &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\chi(t)\frac{1}{1+t^2}\ d\mu\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\frac{1}{1+t^2}dt\\ &= \lim_{n\to+\infty}[\arctan t]_{-n}^{n}\\ &= \pi\end{aligned}$$

□

Exemple Montrons que la fonction définie par $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\ d\mu &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\chi_{[-n,n]}(t)\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\ d\mu\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt\\ \text{par le cours de spé} &= +\infty\end{aligned}$$

□

Exemple Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \chi_{[-n,n]}(x)$. On a $f_n(x) \longrightarrow 0$ presque partout. De plus,

$$\forall n\in\mathbb{N}, |f_n(x)| \leq 1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

Il n'existe pas de fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ majorant $|f_n|$ presque partout, car sinon, on aurait

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n\ d\mu = 1 = \int\lim_{n\to+\infty} f_n\ d\mu = 0$$

$\Rightarrow$CONTRADICTION *

4. L'espace $L^1(\mathbb{R}^N)$

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose $N_1(f) = \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu$, où μ est la mesure de Lebesgue. On se demande si N_1 est une norme pour $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$:

1. $N_1(0) = 0$
2. $N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$
3. $N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f)$
4. $N_1(f) \geq 0$
5. $N_1(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ presque partout : Ce n'est donc pas une norme

---

***Définition* 14.** *On considère sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ la relation d'équivalence*

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ presque partout}$$

***Définition* 15.** *On appelle $L^1(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)/\sim$. Alors $(L^1(\mathbb{R}^N), N_1)$ est un espace vectoriel normé.*

DÉMONSTRATION On sait que si $f = g$ presque partout et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\int |f| \, d\mu = \int |g| \, d\mu$. Ainsi, 1., 2., 3., 4. sont vraies sur $L^1(\mathbb{R}^N)$.
D'autre part, on a $N_1(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Ainsi,

$$N_1 \text{ est une norme pour } L^1(\mathbb{R}^N).$$ □

On notera que pour la suite,

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^N), ||f||_1 = N_1(f)$$

Théorème 7:
Soit (f_n) et $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On suppose que $\int |f_n - f| \, d\mu \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors

$$\exists \ n_1, \ldots, n_k \text{ croissants, } f_{n_k} \longrightarrow f \text{ presque partout.}$$

DÉMONSTRATION Fait appel au fait que L^1 est complet. Voir le cours du second semestre. □

***Définition* 16.** *On peut de la même façon définir les espaces $L^p(\mathbb{R}^N), 1 \leq p \leq +\infty$ de la manière suivante :*

- *si $p < +\infty$*

$$f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f|^p \, d\mu < +\infty$$

$$||f||_p = (\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p \, d\mu)^{1/p}$$

- *si $p = +\infty$*

$$f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow f \text{ est bornée presque partout}$$

$$||f||_\infty = \inf\{M/A = \{x, f(x) > M\}, \mu(A) = 0\}$$

4-a. Intégrale dépendant d'un paramètre

On considère une fonction f mesurable définie sur $I \times A$, pour tout $t \in I$ et presque tout $x \in A$, et $\forall t \in I, x \longmapsto f(t,x) \in \mathcal{L}^1(A)$.

$$F(t) = \int_A f(t,x)\ d\mu$$

Théorème 8:
Continuité de F
Si on a :

1. $t \longmapsto f(t,x)$ *est continue sur* I *pour presque tout* x.
2. $\forall t \in I, |f(t,x)| \leq g(x)$ *pour presque tout* x, *avec* $g \in \mathcal{L}^1(A)$.

Alors F *est continue sur* I.

Démonstration C'est une application du théorème de convergence dominée. On va montrer la continuité de F en $t \in I$. Soit :
- $t_n \longrightarrow t$.
- $f_n(x) = f(t_n, x) \longrightarrow f(t,x)$ presque partout.

On suppose que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x)| = |f(t_n,x)| \leq g(x)$$

($t_n \in I$ pour $n \geq N$)
Ainsi, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A f(t_n,x)\ d\mu = \int_A \lim_{n\to+\infty} f(t_n,x)\ d\mu$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} F(t_n) = F(t)$$

Donc F est continue en t. □

Théorème 9:
Condition de dérivabilité pour F
Si on a :

1. $\forall t \in I, t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ *est continue sur* I *pour presque tout* x.
2. $\forall t \in I$,

$$\exists g \in \mathcal{L}^1(A), \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$$

et

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\ d\mu$$

Alors F *est dérivable sur* I.

Démonstration On veut montrer la dérivabilité en t.

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_A \frac{F(t+h,x)-F(t,x)}{h}\ d\mu$$

1. $$\widetilde{f}_k(t) = \frac{F(t+h,x)-F(t,x)}{h} \underset{h\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$$

2. $$f(t+h,x) = f(t,x) + h\frac{\partial f}{\partial t}(\theta_k,x), \theta_k \in]t,t+h[$$

$$\Leftrightarrow \widetilde{f}_k(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\theta_k,x) \Rightarrow |\widetilde{f}_k(t)| \leq g(x)$$

Ceci pour tout h tel que $t+h \in I$. □

On applique alors le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{h\to 0}\int_A \widetilde{f}_k(t,x)\ d\mu = \int_A \lim_{h\to 0}\widetilde{f}_k(t,x)\ d\mu$$

$$\Rightarrow F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\ d\mu$$

4-b. Théorèmes de Tonelli et de Fubini

Théorème 10:
THÉORÈME DE TONELLI
Soit $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ des ouverts et soit f mesurable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. On suppose que

$$g(y) = \int_{\Omega_1} |f(x,y)|\ d\mu(x) < +\infty$$

et que :

$$\int_{\Omega_2} g(y)\ d\mu(y) < +\infty$$

Alors on a le résultat suivant :

$$f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

Remarque TRÈS IMPORTANT : On a aussi si

$$h(x) = \int_{\Omega_2} |f(x,y)|\ d\mu(y) < +\infty$$

et que :

$$\int_{\Omega_1} h(x)\ d\mu(x) < +\infty$$

Alors

$$f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$$

DÉMONSTRATION Ce théorème est admis. □

Théorème 11:
THÉORÈME DE FUBINI
Soit $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$,Alors :
Pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$g : y \longmapsto f(x,y) \in L^1(\Omega_2)\ \textit{et}\ \int_{\Omega_2} f(x,y)\ d\mu(y) \in L^1(\Omega_1)$$

De même pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$h : x \longmapsto f(x,y) \in L^1(\Omega_1)\ \textit{et}\ \int_{\Omega_1} f(x,y)\ d\mu(x) \in L^1(\Omega_2)$$

De plus, on a :

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)\ d\mu(x)\ d\mu(y) = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\ d\mu(y)\right)\ d\mu(x) = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\ d\mu(x)\right)\ d\mu(y)$$

DÉMONSTRATION Ce théorème est admis. □

Théorème 12:
THÉORÈME DE CHANGEMENT DE VARIABLES
Soit U et Ω des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U \longrightarrow \Omega$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
On note pour $x \in U$:

$$J_\varphi(x) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq N}, \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$$

Alors, si f est une fonction mesurable définie presque partout sur Ω, on a :

$$\int_\Omega f(y)\ d\mu(y) = \int_U f(\varphi(x))|J_\varphi(x)|\ d\mu(x)$$

DÉMONSTRATION Ce théorème est admis. □

Chapitre II

Bases Hilbertiennes de $L^2([0, a]) = L^2(0, a)$

La notation $L^2([0, a]) = L^2(0, a)$ veut dire que la valeur du carré de l'intégrale de toute fonction appartenant à $L^2([0, a])$ ne dépend pas de la valeur de la fonction en 0 et en a.

1. L'espace $L^2(0, a)$

Définition 1. *$L^2(0, a)$ est l'espace des fonctions mesurables définies sur $[0, a]$ tel que*

$$\int_{[0,a]} |f|^2 \, d\mu < +\infty \text{ où } \mu \text{ est la mesure de Lebesgue.}$$

Remarque Parfois, dans la littérature, quand μ est la mesure de Lebesgue, on trouve que $\int_{[a,b]} f \, d\mu$ s'écrit $\int_a^b f \, dx$. On adoptera cette notation dans la suite du cours. *

Définition 2. *L'espace $L^2(0, a)$ est muni d'un produit scalaire :*

$$\forall f, g \in L^2(0, a), \langle f, g \rangle = \int_0^a f(t)\overline{g}(t)dt$$

La norme associée à ce produit scalaire est la suivante :

$$||f||_{L^2(0,a)} = \sqrt{\int_0^a |f|^2 \, dx} = \sqrt{\int_0^a |f|^2 \, d\mu}$$

Théorème 1:
$(L^2(0, a), ||.||_{L^2(0,a)})$ *est un **espace de Hilbert**, c'est à dire un espace vectoriel préhilbertien tel que l'espace est complet pour la norme associée au produit scalaire.*

Proposition 1:
[Inégalité de Cauchy-Schwarz]
Si f et $g \in L^2(0, a)$, alors $fg \in L^1(0, a)$ et on a :

$$\left| \int_0^a fg \, dx \right| < ||f||_{L^2(0,a)} ||g||_{L^2(0,a)}$$

Démonstration à titre d'exercice ...

Propriété 1:
Si $a < +\infty$, alors $L^2(0,a) \subset L^1(0,a)$

Démonstration En effet,

$$\begin{aligned} \forall f \in L^1(0,a), \int_0^a |f| \, dx &= \int_0^a 1|f| \, dx \\ &\leq ||1||_{L^2(0,a)} ||f||_{L^2(0,a)} \\ &\leq \sqrt{\mu([0,a])} ||f||_{L^2(0,a)} \\ &\leq \sqrt{a} ||f||_{L^2(0,a)} < +\infty \end{aligned}$$

On peut remplacer $[0,a]$ par n'inmporte quel intervalle borné. □

Remarque Attention ! : $L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^1(\mathbb{R})$. *

Exemple $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$, or $\dfrac{\sin x}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$ car cette fonction n'est pas intégrable en module. *

2. Bases Hilbertiennes de $L^2(0,a)$

Définition 3. *Soit $\mathcal{B} = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\varphi_n \in L^2(0,a)$. Alors $\mathcal{B}$ est une* **base Hilbertienne** *de $L^2(0,a)$ si et seulement si :*

1. *$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{m,n}$*
2. *La famille $\mathcal{B}$ est* **totale***, c'est à dire que tout élément de $L^1(0,a)$ s'écrit comme la limite d'une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{B}$, ou encore les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{B}$ sont denses dans $L^2[0,a)$:*

$$\mathcal{B}^\perp = \{g, g \in L^2(0,a) / \forall n \in \mathbb{N}, \langle g, \varphi_n \rangle = 0\} = \{0\}$$

Remarque Ne pas confondre Base algébrique et Base Hilbertienne.
- **Base algébrique** : Si H admet une base algébrique, tout élément de H s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de la base. Par exemple, $\mathbb{R}[X]$ admet la base $(1, X, X^2, \ldots)$.
- **Base Hilbertienne** : Si H admet une base Hilbertienne, les élements de H ne s'écrivent pas forcément comme des combinaisons linéaires finies d'éléments de la base. *

Théorème 2:
Théorème de Parseval
$\mathcal{B} = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. *$\forall f \in L^2(0,a), f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$*
2. *$\forall f \in L^2(0,a), ||f||^2_{L^2(0,a)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$*

Démonstration On va démontrer le théorème pour chacunes des propriétés.

1. f s'écrit comme la limite d'une combinaison linéaire finie des φ_n :

$$\left|\left| f - \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i \right|\right|_{L^2(0,a)} \longrightarrow 0$$

$\sum_{i=1}^p \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$ est la projection orthogonale de f sur $vect(\varphi_1 \ldots \varphi_p)$. Ainsi,

$$\left|\left| f - \sum_{i=1}^p \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right|\right|_{L^2(0,a)} \leq \left|\left| f - \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i \right|\right|_{L^2(0,a)}$$

D'où , dans $L^2(0,a)$:

$$\Rightarrow f = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a \left| f - \sum_{i=1}^{N} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right|^2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2.

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\|^2 \\ = & \left\langle f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i , f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\rangle \\ = & \left\langle f, f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{p} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i , f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\rangle \end{aligned}$$

Or on a : $f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \in vect(\varphi_1 \dots \varphi_p)^{\perp}$. On a donc le second terme du calcul qui se simplifie car on a un produit scalaire de deux termes orthogonaux. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{i=1}^{p} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\|^2 \\ = & \ ||f||^2_{L^2(0,a)} - \left\| \sum_{i=1}^{p} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i \right\|^2_{L^2(0,a)} \\ = & \ ||f||^2_{L^2(0,a)} - \sum_{i=1}^{p} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$ □

Finalement,

$$||f||^2_{L^2(0,a)} = \sum_{i=1}^{p} |\langle f, \varphi_i \rangle|^2$$

3. Série de Fourier

On considère l'espace suivant :

$$L^2_p(0,a) = \{f \in L^2(0,a)/f \text{ est apériodique}\}$$

On considère le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a f(t)\overline{g}(t)\ dt$$

et on note $\mathcal{B} = \left(\frac{e^{\frac{2i\pi nx}{a}}}{\sqrt{a}} \right)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème 3:
$\mathcal{B}$ est une base Hilbertienne de $L^2_p(0,a)$ donc

1.
$$\forall f \in L^2(0,a), c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int_0^a f(x)\ \frac{e^{\frac{-2i\pi nx}{a}}}{\sqrt{a}}\ dx$$

2.
$$\forall f \in L^2(0,a), \int_0^a |f|^2\ dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$$

DÉMONSTRATION On commence par montrer que $\mathcal{B}$ est orthonormée.

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{a} \int_0^a e^{\frac{2i\pi(n-m)x}{a}}\, dx = \delta_{n,m}$$

On va ensuite démontrer que les combinaisons linéaires de $\mathcal{B}$ sont denses dans $L^2(0,a)$. On a besoin de deux résultats intermédiaires. □

Lemme 1:
[FÉJER-DIRICHLET]
Soit f une fonction a-périodique. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2([0,a])$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \int_0^a f(t)\, \frac{e^{\frac{-2i\pi nt}{a}}}{\sqrt{a}}\, dt$$

Alors $\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \varphi_n(x)$ converge uniformément vers f.

DÉMONSTRATION On démontre que la suite de terme général $c_n\varphi_n(x)$ converge normalement sur $[0,a]$.

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^a f(t)\, \frac{e^{\frac{-2i\pi nt}{a}}}{\sqrt{a}}\, dt \\
&= \left[-f(t)\frac{e^{\frac{-2i\pi nt}{a}}}{\sqrt{a}\left(\frac{2i\pi n}{a}\right)}\right]_0^a + \int_0^a f'(t)\, \frac{e^{\frac{-2i\pi nt}{a}}}{\sqrt{a}\left(\frac{2i\pi n}{a}\right)}\, dt \\
&= 0 + \left[f'(t)\frac{e^{\frac{-2i\pi nt}{a}}}{\sqrt{a}\left(\frac{2i\pi n}{a}\right)^2}\right]_0^a - \int_0^a f''(t)\, \frac{e^{\frac{-2i\pi nt}{a}}}{\sqrt{a}\left(\frac{2i\pi n}{a}\right)^2}\, dt \\
&= 0 + \int_0^a f''(t)\, \frac{e^{\frac{-2i\pi nt}{a}}}{\sqrt{a}\left(\frac{2i\pi n}{a}\right)^2}\, dt
\end{aligned}$$

Donc

$$|c_n\varphi_n(x)| \leq \left| \frac{e^{2i\pi nx}}{\sqrt{a}} \int_0^a f''(t)\, \frac{e^{\frac{-2i\pi nt}{a}}}{\sqrt{a}\left(\frac{2i\pi n}{a}\right)^2}\, dt \right| \leq \frac{a^2||f''||_\infty}{4\pi^2 n^2}$$

et donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\varphi_n(x)$ converge normalement, donc converge uniformément. □

Lemme 2:
Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $p \in \{1,2\}$. Alors $\forall f \in L^p(I), \forall \varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}^k(I)$ tel que

1. *$\exists \alpha, \beta, \alpha < \beta, g(x) = 0$ si $x \in I \backslash]\alpha, \beta[$*
2. *$||f-g||_p \leq \varepsilon$, c'est à dire*

$$\left(\int_I |f-g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

Autrement dit, l'espace $\mathcal{C}_c^k(I)$ à support compact est dense dans $L^p(I)$.

DÉMONSTRATION Ce lemme est admis. □

DÉMONSTRATION [DÉMONSTRATION DU THÉORÈME]
Soit $f \in L^2(0,a)$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathcal{C}_c^2(0,a)$ tel que

$$||f-g||_{L^2(0,a)} \leq \varepsilon$$

On sait que la série de Fourier de g converge uniformément vers g :

$$\begin{aligned}
\left|\left| g - \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(g)\varphi_n \right|\right|_2^2 &= \int_0^a \left| g - \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(g)\varphi_n \right|^2 \\
&\leq a \left|\left| g - \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(g)\varphi_n \right|\right|_\infty^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ La série de Fourier converge aussi dans $L^2(0,a)$ vers g. Alors

$$\left|\left|f - \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(g)\varphi_n\right|\right|_2 \leq ||f-g||_2 + \left|\left|g - \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(g)\varphi_n\right|\right|_2^2 \leq \varepsilon + \sqrt{a}\ \varepsilon$$

Ainsi, f s'écrit comme limite d'une combinaison linéaire des φ_n, donc $\mathcal{B} = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $L^2(0,a)$. $\square$

Chapitre III

Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

1. Introduction

L'analyse en fréquence apparaît en 1922 dans le traité de J. Fourier "Théorie analytique de la chaleur". L'équation analytique de la chaleur s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \delta u \\ u(\overrightarrow{x}, 0) & = & \varphi(\overrightarrow{x}) \end{cases}$$

Fourier cherche un opérateur permettant de résoudre ce type d'équation.Il souhaite appliquer à son équation un certain opérateur F qui linéarise les opérations différentiels :

$$F : u \mapsto F(u) \text{ tel que } F : \frac{\partial^k u}{\partial x^k}.(2i\pi u)^k F(u) \tag{III.1}$$

Un opérateur F satisfaisant les conditions (1) est l'intégrale de Fourier dont le nom apparaît en 1904 dans la théorie de Lebesgue.

2. Définition

Définition 1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On lui associe $\widehat{f}$, dite transformée de Fourier de f, définie par*

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x}d\mu$$

ceci sachant que μ est la mesure de Lebesgue.

3. Propriétés

Théorème 1:
Théorème de Riemann-Lebesgue

1. *$F : f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.*
2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est continue et $\lim\limits_{\nu \to \pm\infty} \widehat{f}(\nu) = 0$.*

Démonstration 1. F est linéaire par linéarité de l'intégrale. Montrons que F lipschitzienne. On a déjà :

$$||F(f)||_\infty = ||\widehat{f}||_\infty$$

$$|\widehat{f}(\nu)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = ||f||_1$$

On en déduit donc que :

$$||\widehat{f}||_\infty \leqslant ||f||_1$$

$$||\widehat{f}||_\infty \leqslant ||f||_1$$

Donc $F : f \mapsto \widehat{f}$ est lipschitzienne en 0 donc est continue.

2. Montrons que $\nu \mapsto \widehat{f}(\nu)$ est continue.

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$$

D'une part, $\nu \longmapsto f(x)e^{-2i\pi\nu x}$ est continue pour presque tout x. De plus :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx\right| \leqslant |f(x)| et |f| \in L^1(\mathbb{R})$$

Donc $\nu \longmapsto \widehat{f}(\nu)$ est continue. Montrons ensuite que :

$$\widehat{f}(\nu) \underset{\nu\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{III.2}$$

On sait que les applications de $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$.

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists\ g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}),\ ||g.f||_1 < \varepsilon$$

Pour $g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2i\pi\nu x}dx &= \left[g(x)\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} g'(x)\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{2i\pi\nu}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g'(x)\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{2i\pi\nu}dx \quad car\ g \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\widehat{g}(\nu)| \leqslant \frac{1}{2\pi\nu}.||g'||_{1,\ support\ de\ g} \underset{\nu\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

En effet, g' est continue sur K le compact de définition de g donc :

$$||g'||_{\infty,K} < +\infty$$

$$||g'||_{1,K} = \int_K g'(x)d\mu \ \leqslant\ \mu(K)\ ||g'||_{\infty,K} < +\infty$$

On a donc

$$|\widehat{f}(\nu)| = \left|\int f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx\right| \leqslant \int |f(x)|dx = ||f||$$

$$\Rightarrow |\widehat{f}(\nu) - \widehat{g}(\nu)| \leqslant ||f-g||_1$$

Ceci par linéarité de la transformée de Fourier. Alors :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\ g,\ ||f-g||_1\ \leqslant\ \frac{\varepsilon}{2}$$

et on sait aussi que

$$\exists\ \nu_0,\ \forall\nu,\ |\nu| \geqslant |\nu_0|,\ |\widehat{g}(\nu)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |\widehat{f}(\nu)| \leqslant ||f-g||_1 + |\widehat{g}(\nu)| \leqslant \varepsilon$$

Donc $\widehat{f}(\nu) \underset{\nu\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Exemple Fonction porte :

$$\Pi(x) = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\Pi}(\nu) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu x}dx \\
&= \left[\frac{e^{-2i\pi\nu x}}{-2i\pi\nu}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
&= e^{-i\pi\nu} - \frac{e^{-\pi\nu}}{2i\pi\nu} \\
&= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \\
&= \sin_c(\pi\nu)
\end{aligned}$$

$*$

Proposition 1:
PROPOSITION DU RETARD
Si on note $g(x) = f(x-t) = \tau_t f(x)$, alors on a, avec $u = x - t$:

$$\widehat{g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\ e^{-2i\pi\nu x}\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(u)\ e^{-2i\pi\nu(u+t)}\ dx = \widehat{f}(\nu)\ e^{-2i\pi\nu t}$$

Proposition 2:
Soit $g(x) = f(a.x)$.
- *si $a > 1$: c'est une **contraction***
- *si $a < 1$: c'est une **dilatation**.*

alors

$$\widehat{g}(\nu) = \frac{1}{|a|}.\widehat{f}(\frac{\nu}{a})$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} f(a.x)e^{-2i\pi\nu x}dx \\
si\ a > 0 &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\ e^{\frac{-2i\pi\nu u}{a}}\ \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\ \widehat{f}(\frac{\nu}{a}) \\
si\ a < 0 &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\ e^{\frac{-2i\pi\nu u}{a}}\ \frac{du}{a} = -\frac{1}{a}\ \widehat{f}(\frac{\nu}{a})
\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 2:
On a les trois points suivants :

1. *Si $\forall k \in 0..n,\ x \mapsto x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est n fois dérivable et on a*

$$\widehat{f}^{(k)}(\nu) = \widehat{(-2i\pi x)^k f}(\nu) = F(x \longrightarrow (-2i\pi x)^k f(x))(\nu)$$

2. *Si $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et si $\forall k \in 0..n,\ f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors*

$$\widehat{f^{(k)}}(\nu) = (2i\pi\nu)\widehat{f}(\nu)$$

3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f}$ est à support compact, alors*

$$\widehat{f} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$$

DÉMONSTRATION 1. Démontrons que la propriété est vrai quand $k = 1$

$$\widehat{f}'(\nu) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx\right)'$$

$$\frac{\partial g}{\partial \nu}(x,\nu) = (-2i\pi x)f(x)e^{-2i\pi\nu x}$$

Ceci est $\mathcal{C}^0$ par rapport à ν pour presque tout x. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial \nu}(x,\nu) \leqslant 2\pi|x.f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \widehat{f}'(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g}{\partial \nu}(x,\nu)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi x)f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \\
&= (-2i\pi x)\widehat{f}(\nu) \\
&= F(x \longmapsto (-2i\pi x)f(x))(\nu)
\end{aligned}$$

La fin de la démonstration se fait par récurrence.

2. On a $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in 0..n,\ \widehat{f^{(k)}}(\nu) &= \int f^{(k)}(x)e^{-2i\pi\nu x}dx \\
&= \left[f^{(k-1)}(x)e^{-2i\pi\nu x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int f^{(k)}(x)(2i\pi\nu)e^{-2i\pi\nu x}dx
\end{aligned}$$

Remarque $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k-1)}(x) = 0$. On sait qu'au minimum $f^{(k)}$ est $\mathcal{C}^1$.

Proposition 3:

$$\forall\ h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), h \in L^1(\mathbb{R}),\ h' \in L^1(\mathbb{R}),\ alors\ \lim_{x\to+\infty} h^{(k-1)}(x) = 0$$

On peut trouver un contre-exemple avec $h \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, tel que

$$h \in L^1(\mathbb{R}),\ h' \in L^1(\mathbb{R})\ et\ \lim_{x\to+\infty} h^{(k-1)}(x) \neq 0$$

Démonstration Montrons que h a une limite :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = h(a) + \int_a^x h'(t)dt \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} h(a) + l$$

donc h a une limite en $+\infty$. La limite de h en $\pm\infty$ est 0 car $h \in L^1(\mathbb{R})$. En effet, sinon,

$$\begin{aligned}
& \exists x_0,\ \forall x \geqslant x_0,\ |h(x)| > \tfrac{l}{2} \\
\Rightarrow\ & \int_{x_0}^{+\infty} |h(x)|dx = +\infty \\
\Rightarrow\ & h \notin L^1(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

□

Donc

$$f^{(k)}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x)(2i\pi\nu)\ e^{-2i\pi\nu x}dx$$

En faisant $k-1$ intégrations par parties, on obtient alors :

$$\widehat{f}^{(k)}(\nu) = (2i\pi\nu)^k\widehat{f}(\nu)$$

3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et f à support compact,

$$\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \widehat{f} \in \mathcal{C}^k$$

D'après le point 1, $\widehat{f} \in \mathcal{C}^k$ si $\forall p \leqslant k$, $x^p.f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Montrons que $x^p\ f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

$$\int (x^p.f(x))dx = \int_K |x^p.f(x)| \leqslant ||x^p||_{\infty,K}.||f||_1 < +\infty$$

car on sait que

$$||x^p||_{\infty,K} < +\infty$$

Ainsi, on aboutit au résultat recherché :

$$\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

Et c'est fini ! □

Proposition 4:
PLANCHEREL
Si f et g sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\ g = \int_{\mathbb{R}} f\ \widehat{g}$$

DÉMONSTRATION

$$\int \widehat{f}g = \int \int f(x)e^{-2i\pi\nu x}dxg(\nu)d\nu$$

Pour montrer l'égalité précédente, il suffit de montrer que $(x,\nu) \mapsto f(x)g(\nu)e^{-2i\pi\nu x}$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Or on a :

$$|f(x)g(\nu)e^{-2i\pi\nu x}| = |f(x)|.|g(\nu)|$$

et

$$\int |f(x)|.|g(\nu)|dx = |g(\nu)|.||f||_1 < +\infty \textit{ pour presque tout } \nu$$

De plus :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(\nu)|.||f||_1 = ||g||_1.||f||_1$$

Donc $(x,\nu) \mapsto f(x)g(\nu e^{-2i\pi\nu x} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et par conséquence :

$$\begin{aligned}\int \widehat{f}gd\nu &= \int \int f(x)e^{-2i\pi\nu x}dxg(\nu)d\nu \\ &= \int f(x) \int g(\nu)e^{-2i\pi\nu x}d\nu dx \\ &= \int f\ \widehat{g}dx\end{aligned}$$

□

4. Inversion de la transformée de Fourier

Théorème 3:
Si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$$

Alors pour tout x tel que f est $\mathcal{C}^0$ en x, on a

$$\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})(x) = f(x)$$

DÉMONSTRATION Soit $g_n(x) = e^{-\frac{2\pi}{n}x}$ et $\widehat{g}_n(\nu) = \frac{1}{\pi}.\frac{n}{1+n^2\nu^2}$. Comme $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ et $g_n\widehat{(x)e^{2i\pi\nu x}} = \widehat{g}_n(\nu - x)$, on a la relation suivante :

$$\int \widehat{f}(\nu)g(\nu)e^{2i\pi\nu x}d\nu = \int f(\nu)\widehat{g}_n(\nu - x)d\nu$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on sait déjà que

$$\int \widehat{f}(\nu)g_n(\nu)e^{2i\pi\nu x}d\nu \to \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})(x)$$

Donc il reste à montrer que $\int f(\nu)\widehat{g}_n(\nu - x)d\nu \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} f(x)$. On sait que la fonction est $\mathcal{C}^0$ en x, et :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists y,\ |x - y| < \mu \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left|\int f(\nu)\widehat{g}_n(\nu - x)d\nu - f(x)\right| &= \left|\int f(\nu + x)\widehat{g}_n(\nu)d\nu - f(x)\right| \\
&= \left|\int (f(x+\nu) - f(x))\widehat{g}_n(\nu)d\nu\right|,\ \text{ceci car } \int \widehat{g}_n = 1 \\
&\leq \int_{|\nu|\leqslant\mu} |f(\nu + x) - f(x)|.|\widehat{g}_n(\nu)|d\nu + \int_{|\nu|\geqslant\mu} |f(\nu + x) - f(x)|.|\widehat{g}_n(\nu)|d\nu
\end{aligned}$$

or on sait d'autre part que :

$$\int_{|\nu|\leqslant\mu} |f(\nu + x) - f(x)|.|\widehat{g}_n(\nu)|d\nu \leqslant \varepsilon \int_{|\nu|\leqslant\mu} |\widehat{g}_n(\nu)|d\nu \leqslant \varepsilon$$

D'où

$$\left|\int_{|\nu|\geqslant\mu} f(x)g_n(\nu)\right| \leqslant f(x).\int_{|\nu|\geqslant\mu} |\widehat{g}_n(\nu)|d\nu = f(x).(1 - \frac{2}{\pi}.arctan(n\nu)) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\left|\int_{|\nu|\geqslant\mu} f(x+\nu)g_n(\nu)\right| \leqslant \int_{|\nu|\geqslant\mu} f(x+\nu)|\widehat{g}_n(\nu)| \leqslant ||\widehat{g}_n||_{+\infty} \int_{|\nu|\geqslant\mu} |f(x+\nu)|d\nu \leqslant ||\widehat{g}_n||_{+\infty}.||f||_1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalement, on a montré que

$$\int f(\nu)\widehat{g}_n(\nu - x)d\nu \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

et donc

$$\int \widehat{f}(\nu)e^{2i\pi\nu x}d\nu = f(x)$$

là où f est continue. □

5. Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 2. *On appelle convolution de f et g l'intégrale suivante lorsqu'elle est définie :*

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)dy$$

$$F(x) = f * g = g * f$$

Propriété 1:
Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $F \in L^1(\mathbb{R})$ et $||f * g||_1 \leqslant ||f||_1.||g||_1$

DÉMONSTRATION Pour montrer que F existe si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on montre que F est intégrable, c'est à dire :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\ g(y)\ dy \right| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\ g(y)\ dx\ dy < +\infty$$

or, soit $(x,y) \mapsto |f(x-y)g(y)|$, on a :

$$\int |f(x-y)g(y)|dx = ||f||_1.|g(y)| < +\infty \textit{ pour presque tout } y$$

et

$$\int ||f||_1.|g(y)|dy = ||f||_1.||g||_1 < +\infty$$

donc par le théorème de Tonelli, $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ce qui entraîne que $F \in L_1(\mathbb{R})$ et donc F est défini presque partout. Maintenant :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy \right| dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)f(y)|dydx = \int \mathbb{R}|f(y) \left| \int \mathbb{R}|g(x-y) \right| dxdy = ||f||_1.||g||_1$$

On a donc le résultat. □

6. Convolution et transformée de Fourier

Proposition 5:
Si $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$

DÉMONSTRATION

$$\widehat{f * g}(\nu) = \int (f * g)(x) e^{-2i\pi\nu x} dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy e^{-2i\pi\nu x} dx$$

On considère $h : (x,y) \mapsto f(y)g(x-y)e^{-2i\pi\nu x}$ dont le module est $|f(y)g(x-y)| \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini à $h(x,y)$. On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\ g(x-y)\ dy\ e^{-2i\pi\nu x}\ dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-2i\pi\nu x}\ dx\ dy$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2i\pi\nu y} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2i\pi\nu x}\ dx\ dy = \widehat{f}(\nu)\ \widehat{g}(\nu)$$

Ainsi : $\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$. □

Proposition 6:
Si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et si $g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ on a :

$$\widehat{f} * \widehat{g} = \widehat{fg}$$

DÉMONSTRATION

$$\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f} * \widehat{g}) = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}).\overline{\mathcal{F}}(\widehat{g}) = f.g \textit{ presque partout}$$

Donc comme $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f})(\nu) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on a $f \in \mathcal{C}^0$, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et de même pour g

$$\Rightarrow f, g \in L^1(\mathbb{R})$$

En appliquant la transformée de Fourier, on obtient

$$\widehat{f} * \widehat{g} = \widehat{f.g}$$

La proposition est démontrée. □

7. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Rappel : $L^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de carré intégrable, on peut le munir de la norme

$$||f||_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

et on peut associer à cette norme un produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t)dt$$

Le produit scalaire permet de dire que l'égalité de Cauchy-Schwartz est vérifiée :

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}), \ \left|\int f(t)\overline{g}(t)dt\right| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||f||_2.||g||_2$$

7-a. Fonction d'auto-corrélation de $L^2(\mathbb{R})$

Définition 3. *$f, g \in L^2(\mathbb{R})$. On appelle auto-corrélation de f avec g la fonction*

$$F(x) = \int f(y+x)\overline{g}(y)dy$$

Remarque Si f, g sont à valeur réelle (on fait le changement de variable $\widetilde{f}(x) = f(-x)$) alors,

$$F(x) = \int f(y+x)g(y)dy$$

$$\Rightarrow F(-x) = \int f(y-x)g(y)dy = \int \widetilde{f}(x-y)g(y)dy = \widetilde{f} * g(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = g * \widetilde{f}(-x)$$

7-b. Propriétés de F

Proposition 7:
On a les deux résultats suivants sur F :

1. $|F(x)| \leq ||f||_2||g||_2$
2. *F est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration 1.

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{g}(y)\ dy\right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ||f||_2||g||_2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} |F(x+y) - F(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x+\eta+y) - f(x+y))\ g(y)\ dy\right| \\ |f(x+\eta+y) - f(x+y)|^2 &= |f(x+\eta+y)|^2 + |f(x+y)|^2 - 2f(x+\eta+y)f(x+y) \\ \text{Or on a : } |f(x+\eta+y)|^2 &= ||f||^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x+y)|^2 \\ \int_{\mathbb{R}} |f(x+\eta+y)f(x+y)|\ dy &\leq ||f||_2^2 \\ \int_{\mathbb{R}} |f(x+\eta+y) - f(x+y)|^2\ dy &\leq 4||f||_2^2 \\ \Rightarrow |f(x+y) - f(x)| &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x+\eta+y) - f(x+y)|^2\ dy} \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorême de convergence dominée, on en déduit que $||g||_2 \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ car :

- $f(x+\eta+y) - f(x+y) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ presque partout.
- $\forall |\eta| \leq 1, |f(x+\eta+y) - f(x+y)|^2 \leq g(y) \in L^1(\mathbb{R})$ □

8. *Transformée de Fourier sur* $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

Définition 4. *On considère l'application $\mathcal{F}$ définie ainsi :*

$$\begin{array}{rcl} L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \widehat{f} = \mathcal{F}(f) \end{array}$$

On va montrer que $\widehat{(f)} \in L^2(\mathbb{R})$ en montrant que $||f||_2 = ||\widehat{f}||_2$.

Théorème 4:
Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors on a le résultat :

$$||f||_2 = ||\widehat{f}||_2$$

Démonstration On considère $g_\alpha(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ e^{\frac{-\pi^2 x^2}{\alpha}}$. On trouve alors par le calcul que :

$$\widehat{g_\alpha}(x) = e^{-\alpha x^2}$$

On calcule ensuite :

$$\begin{array}{rcl} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g_\alpha}(\xi) |\widehat{f}(\xi)|\ d\xi & = & \int_{\mathbb{R}} \widehat{g_\alpha}(\xi) \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)}\ d\xi \\ & = & \int_{\mathbb{R}} \left(\widehat{g_\alpha}(\xi) \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(y) e^{2i\pi\xi y} dy \right) d\xi \end{array}$$

Comme l'application $(\xi, x, y) \longmapsto \widehat{g_\alpha} \xi f(x) \overline{f}(y) e^{2i\pi\xi(y-x)} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ avec $f \in L^1(\mathbb{R})$, on peut utiliser le théorème de Fubini et donc on peut intégrer dans n'importe quel sens. On reprend donc le calcul :

$$\begin{array}{rcl} & = & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f}(y) \int_{\mathbb{R}} \widehat{g_\alpha}(\xi) e^{2i\pi\xi y}\ d\xi\ dx\ dy \\ & = & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f}(y) g_\alpha(y-x)\ dy\ dx \\ (y = y - x) & = & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f}(y+x)\ dx \right) g_\alpha(y)\ dy \\ (y = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} y) & = & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f}(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} y + x)\ dx \right) e^{-\pi y^2})\ dy \\ & = & \int_{\mathbb{R}} F(\sqrt{\alpha}\pi y) e^{\pi y^2}\ dy \end{array}$$

On a :

1. $F(\sqrt{\alpha}\pi y) e^{\pi y^2} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} F(0) e^{-\pi y^2}$
2. $F(\sqrt{\alpha}\pi y) e^{\pi y^2} \leq ||F||_\infty e^{-\pi y^2} \in L^1(\mathbb{R})$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} F(0)\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} &= F(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f}(x)\ dx \\ &= ||f||_2^2 \end{aligned}$$

Pour conclure, on a donc bien $||f||_2 = ||\overline{f}||_2$ donc $\widehat{f} \in L^2\mathbb{R}$. □

Propriété 2:
Si f et g sont des éléments de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f}\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\overline{g}$$

Démonstration à titre d'exercice ... □

9. *Transformée de Fourier dans* $L^2(\mathbb{R})$

Lemme 1:
L'espace $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. C'est dire :

$$\forall\ f \in L^2(\mathbb{R}),\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), ||f-g||_2 \leq \varepsilon$$

Définition 5. *On définit la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ comme la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la transformée de Fourier de toute suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tendant vers f.*

Remarque La limite ne dépend pas du choix de f_n. En effet,

$$\text{Si } f_n \longrightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) : ||f_n - f||_2 \longrightarrow 0$$
$$\text{Si } \widetilde{f_n} \longrightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) : ||\widetilde{f_n} - f||_2 \longrightarrow 0$$

Alors on obtient :

$$||f_n - \widetilde{f_n}||_2 \longrightarrow 0$$

En général, comme la limite ne dépend pas du choix de la suite, on choisit :

$$f_n = \chi_{[-n,n]}(x)\ f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

f_n est telle que :

1. $|f_n(x) - f(x)|^2 \to 0$ *presque partout*
2. $|f_n(x) - f(x)|^2 \leqslant |f(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R})$

Donc si on applique le théorème de convergence dominée,

$$f_n \longrightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

On peut alors voir la transformée de Fourier comme la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de

$$\widehat{f_n}(\nu) = \int_{-n}^{n} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$$

$$\Longleftrightarrow ||\widehat{f_n}(\nu) - \widehat{f}(\nu)||_2 \to 0$$

Attention !

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(\nu) - f(\nu)|^2 \longrightarrow 0 \not\Rightarrow \widehat{f_n}(\nu) \to \widehat{f}(\nu) \textit{ presque partout}$$

On peut prolonger la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ en une application de $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Si la transformée de Fourier est continue, linéaire, de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, son prolongement à $L^2(\mathbb{R})$ l'est aussi (Théorème de Hahn-Banach, vu au second semestre). ∗

Remarque

$$||f_n - f||_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

C'est à dire $\displaystyle\int_{|x|>n} |f(x)|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La transformée de Fourier de f sera la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de $\widehat{f_n}$ si cette limite existe.
On montre que $\widehat{f_n}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire pour $n \geq p$:

$$||\widehat{f_n} - \widehat{f_p}||_2 = ||\widehat{f_n - f_p}||_2 = ||f_n - f_p||_2 = \sqrt{\int_{p\leq|x|\leq n} |f(x)|^2} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\widehat{f_n}$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{R})$ qui converge donc et sa limite est la transformée de f notée $\mathcal{F}(f)$. $*$

9-a. Propriétés de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Propriété 3:
La transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une isométrie :

$$||f||_2 = ||\mathcal{F}(f)||_2$$

Démonstration Pour la fonction $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tendant vers f dans $L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$||f_n||_2 = ||\widehat{f_n}||_2$$

Montrons que :

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow f \in L^2(\mathbb{R}),\ alors\ ||f||_2 \longrightarrow ||f||_2 \\ \widehat{f_n} \longrightarrow \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}),\ alors\ ||\widehat{f}||_2 \longrightarrow ||\widehat{f}||_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl}
|f_n|^2 = |f_n - f + f|^2 & \leq & -f_n - f|^2 + |f|^2 + 2|f|\ |f_n - f| \\
|f_n|^2 - |f|^2 & \leq & |f_n - f|^2 + 2|f|\ |f_n - f| \\
|f|^2 = |f - f_n + f_n|^2 & \leq & |f - f_n|^2 + |f_n|^2 + 2|f - f_n|\ |f_n| \\
|f|^2 - |f_n|^2 & \leq & |f - f_n|^2 + 2|f - f_n|\ |f_n| \\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|^2 + 2|f|\ |f_n - f| & \leq & ||f_n - f||^2 + 2||f||_2\ ||f_n - f||_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\
\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f - f_n|^2 + 2|f - f_n|\ |f_n| & \leq & ||f_n - f||_2^2 + 2||f_n||_2\ ||f - f_n||_2
\end{array}$$

Or : $||f_n - f||_2^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $||f_n||_2$ est constant car f_n est bornée (f_n converge), et $||f - f_n||_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} |f|^2$$

f est donc une isométrie. □

Propriété 4:
Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, la convolution de f par g est définie par

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)\ g(y)\ dy$$

alors

$$F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^{+\infty}(\mathbb{R})$$

Démonstration

$$\begin{array}{rcl}
|F(x)| & = & \left|\displaystyle\int f(x - y)g(y)dy\right| \\
& \leqslant & \sqrt{\displaystyle\int |f(x - y)|^2 dy}.\sqrt{\displaystyle\int |g(y)|^2 dy} \\
& = & ||f||_2\ ||g||_2
\end{array}$$

On a déjà $F \in L^\infty(\mathbb{R})$. Il faut maintenant montrer que $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} |F(x+\eta) - F(x)| &= \left| \int [f(x+\eta-y) - f(x-y)]\, g(y)dy \right| \\ (Cauchy - Scwartz) &\leqslant \underbrace{\sqrt{\int |f(x+\eta-y) - f(x-y)|^2 dy}}_{\underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0} \cdot \sqrt{\int |g(y)|^2 dy} \end{aligned}$$

Si f est continue et à support compact K, on a :

$$|f(x+\eta-y) - f(x-y)|^2 \rightarrow 0 \textit{ presque partout} \tag{III.3}$$
$$|f(x+\eta-y) - f(x-y)|^2 \leqslant 4.||f||_\infty^2 \in L^1(K) \tag{III.4}$$

Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a :

$$\sqrt{|f(x+\eta-y) - f(x-y)|^2} \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on sait que les applications continues à support compact sont dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}), ||f-g||_2 \leqslant \varepsilon$$

Il suffit de montrer que :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}),\ \int |f(x+\eta-y) - f(x-y)|^2 dy \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $C_c^0(\mathbb{R})$ tel que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. On cherche a montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+\eta-y) - f(x-y)|^2 dy \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(y+\eta) - f(y)|^2 dy &= \int_{\mathbb{R}} |(f(y+\eta) - g_n(y+\eta)) + (g_n(y+\eta) - g_n(y)) + (g_n(y) - f(y))|^2 dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y+\eta) - g_n(y+\eta)|^2 + |g_n(y+\eta) - g_n(y)|^2 + |g_n(y) - f(y)|^2 + 2.DP\ dy \end{aligned}$$

DP est un double produit. C'est en fait une fonction h valant :

$$DP = h(||f(y+\eta) - g_n(y+\eta)||_2,\ ||g_n(y+\eta) - g_n(y)||_2,\ ||g_n(y) - f(y)||_2)$$

On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \int |f(y) - g_N(y)|^2 dy \leqslant \varepsilon$$

On choisit de poser $n = N$, alors pour un η suffisament petit, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |g_N(y+\eta) - g_N(y)|^2 dy \leqslant \varepsilon$$

Finalement,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y+\eta) - f(y)|^2 \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et donc on peut conclure :

$$F \textit{ est continue en } x$$ □

Propriété 5:
Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ *alors :*

$$\int_{\mathbb{R}} f \, . \, \overline{g} \; = \; \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f) \, . \, \overline{\mathcal{F}(g)}$$

DÉMONSTRATION Montrons que la propriété est vraie pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, sachant que $\overline{\mathcal{F}(f)}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi\nu x} dx$, comme $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathcal{F}(f).\overline{\mathcal{F}(g)} = \widehat{f}.\overline{\widehat{g}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f).\overline{\mathcal{F}(g)} &= \mathcal{F}(f).\mathcal{F}(\overset{\vee}{g}) \textit{ avec } \overset{\vee}{g}(x) = \overline{g}(-x) \\
&= \mathcal{F}(f * \overset{\vee}{g})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f).\overline{\mathcal{F}(g)} &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f * \overset{\vee}{g}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f * \overset{\vee}{g})(\xi) e^{2i\pi 0 \xi} d\xi \\
&= \mathcal{F}(\mathcal{F}(f * \overset{\vee}{g}))(0) \\
f * \overset{\vee}{g} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \textit{ donc } &= f * \overset{\vee}{g}(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f.\overline{g}
\end{aligned}$$

□

Propriété 6:
Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ *alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f \, . \, \mathcal{F}(g) \; = \; \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f) \, . \, g$$

DÉMONSTRATION On sait que la propriété est vraie dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (déjà vu précédemment).
On considère

$$\begin{aligned}
g_n &\to g, \; g_n \in L^2(\mathbb{R}) \; (\sim ||g_n - g||_2 \to 0) \\
f_n &\to f, \; f_n \in L^2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

On montre que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n.\mathcal{F}(g_n) \to \int_{\mathbb{R}} f.\mathcal{F}(g)$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} f_n.\mathcal{F}(g_n) - f.\mathcal{F}(g) \right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f_n.\mathcal{F}(g_n) - f.\mathcal{F}(g)| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f_n - f|.|\mathcal{F}(g_n)| + |\mathcal{F}(g_n) - \mathcal{F}(g)|.|f| \\
&\leqslant \underbrace{||f_n - f||_2}_{\to 0 \textit{ dans } L^2(\mathbb{R})} \; . \; \underbrace{||\mathcal{F}(g_n)||_2}_{=||g_n||_2 \text{ bornée}} + \underbrace{||\mathcal{F}(g_n) - \mathcal{F}(g)||_2}_{=||g_n - g||_2 \to 0} \; . \; \underbrace{||f||_2}_{\text{bornée}}
\end{aligned}$$

Donc on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n.\mathcal{F}(g_n) \to \int_{\mathbb{R}} f.\mathcal{F}(g)$$

De même, on montrerait que $\int_{\mathbb{R}} g_n.\mathcal{F}(f_n) \to \int_{\mathbb{R}} g.\mathcal{F}(f)$. Ces deux résultats impliquent :

$$\int_{\mathbb{R}} g.\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}} f.\mathcal{F}(g)$$

□

9-b. Inversion de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 5:
On a le résultat suivant :

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}),\ \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g)) = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(g)) = g$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g)).\overline{f} &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g).\overline{\mathcal{F}}(\overline{f}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(g).\overline{\mathcal{F}}(\overline{f}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g.\overline{f}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow &\quad \forall \overline{f} \in L^2(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} (\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g)) - g)\overline{f} = 0 \\ \Longleftrightarrow &\quad \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g)) - g \in L^2(\mathbb{R})^{\perp} \cap L^2(\mathbb{R}) \\ \Longleftrightarrow &\quad \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(g)) = g\end{aligned}$$

La démonstration est identique pour $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(g)) = g$. □

9-c. Convolution et Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Propriété 7:
Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\widehat{f * g} \neq \widehat{f}.\widehat{g} \text{ car } f * g \notin L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$$

Par contre,

$$\forall x,\ f * g(x) = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}.\widehat{g})(x)$$

Ceci car $f * g \in \mathcal{C}^0$, $\widehat{f}.\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ *donc* $\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}.\widehat{g}) \in \mathcal{C}^0$.

DÉMONSTRATION Montrons que $f * g = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}.\widehat{g})$.

$$\begin{array}{ll} f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) & f_n \longrightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \\ g_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) & g_n \longrightarrow g \text{ dans } L^2(\mathbb{R})\end{array}$$

$$||\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\ \widehat{g}) - \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f_n}\ \widehat{g_n})||_\infty = ||\overline{\mathcal{F}}(\underbrace{\widehat{f}\ \widehat{g} - \widehat{f_n}\ \widehat{g_n}}_{\in L^1(\mathbb{R})})||_\infty$$

Or on sait que :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi\xi x}\ dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ dx = ||f||_1,\ f \in L^1(\mathbb{R})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}||\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\ \widehat{g}) - \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f_n}\ \widehat{g_n})||_\infty &\leq ||\widehat{f}\ \widehat{g} - \widehat{f_n}\ \widehat{g_n}||_1 \\ &= ||(\widehat{f} - \widehat{f_n})\widehat{g} + (\widehat{g} - \widehat{g_n})\widehat{f_n}||_1 \\ &\leq ||(\widehat{f} - \widehat{f_n})\widehat{g}||_1 + ||(\widehat{g} - \widehat{g_n})\widehat{f_n}||_1 \\ &\leq ||\widehat{f} - \widehat{f_n}||_2\ ||\widehat{g}||_2 + ||\widehat{g} - \widehat{g_n}||_2\ ||\widehat{f_n}||_2 \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

De même, on démontre que :

$$\begin{aligned}||f_n * g_n - f * g||_\infty &= ||(f_n - f) * g_n + (g_n - g) * f||_\infty \\ &\leq ||(f_n - f) * g_n||_\infty + ||(g_n - g) * f||_\infty \\ &\leq ||f_n - f||_2\ ||g_n||_2 + ||g_n - g||_2\ ||f||_2 \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

On a donc $f_n + g_n \longrightarrow f + g$ dans L^∞.

$$\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f_n}\ \widehat{g_n}) \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\ \widehat{g})\ dans\ L^\infty$$

On a $f_n + g_n = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f_n}\ \widehat{g_n})$ donc :

$$f * g = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\ \widehat{g}) \qquad \square$$

Propriété 8:
On a toujours : $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{f.g}(\xi)$

Démonstration

$$\begin{array}{ll} f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) & f_n \longrightarrow f\ dans\ L^2(\mathbb{R}) \\ g_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) & g_n \longrightarrow g\ dans\ L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

$f_n\ g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\ g$ dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc :

$$\mathcal{F}(f_n\ g_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}(f\ g)\ dans\ L^\infty(\mathbb{R})$$

Ceci car $||\mathcal{F}(f_n\ g_n) - \mathcal{F}(f\ g)||_\infty \leq ||f_n\ g_n - f\ g||_1$. Montrons donc que $f_n\ g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f\ g$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} ||f_n\ g_n - f\ g||_1 & = & ||(f_n - f)\ g + (g_n - g)\ f||_1 \\ & \leq & ||f_n - f||_2\ ||g||_2 + ||g_n - g||_2\ ||f||_2 \\ & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & 0 \end{array}$$

$\widehat{f_n} * \widehat{g_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widehat{f} * \widehat{g}$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
Soit f_1, g_1, et $(f_{1_n})_{n\in\mathbb{N}}, (g_{1_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que :

$$f_1 = \overline{\mathcal{F}}(f), \quad f_{1_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_1\ dans\ L^2(\mathbb{R})$$
$$g_1 = \overline{\mathcal{F}}(g), \quad g_{1_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g_1\ dans\ L^2(\mathbb{R})$$

Alors

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(f_{1_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \\ \mathcal{F}(g_{1_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g \end{array} \right.$$

La fin de la preuve est laissée à titre d'exercice ... $\square$

10. Applications

Théorème 6:
Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, *alors on a :*

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f_\sigma$$

avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\sigma(x) = f(-x)$$

.

Démonstration Cela revient à montrer que $\mathcal{F}(f) = \overline{\mathcal{F}}(f_\sigma)$.
Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors :

$$\overline{\mathcal{F}}(f_\sigma) = \int_{\mathbb{R}} f(-x) e^{2i\pi n\xi}\ dx = \mathcal{F}(f)$$

Ainsi, par densité, la propriété est vraie pour $f \in L^1(\mathbb{R})$. $\square$

10-a. Calcul de transformées de Fourier

Exemple On sait que :

$$\frac{1}{a+2i\pi\xi} = \mathcal{F}(e^{-a|x|}U(x))$$

Avec

$$U(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x > 0 \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

Donc on peut en déduire facilement que :

$$\frac{1}{a+2i\pi\xi} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}(\mathcal{F}(e^{-a|x|}U(x))) = e^{-a|x|}U(-x)$$

Exemple On sait que :

$$\underbrace{\sin_c(\pi\nu)}_{\in L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{F}(\Pi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})$$

Ainsi, on obtient directement :

$$\sin_c(\pi\nu) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}(\mathcal{F}(\Pi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})) = \Pi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$$

Chapitre IV

Distributions

Dans tout le chapitre, on définit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $i =]\alpha, \beta[$ ou $]-\infty, \beta[$ ou $]\alpha, +\infty[$.

1. Introduction

La théorie des distributions a été inventée par Laurent Schwartz et lui a valu la médaille Fields en 1950. La théorie des distributions est très liée à la physique. On donne deux exemples physiques.

1. En théorie des chocs, on considère qu'un choc a lieu à un instant t, et la force ne s'exerce qu'à cet instant. La force est donc nulle en $t - \Delta t$ et en $t + \Delta t$. Si on veut modéliser un choc, on peut utiliser une fonction ρ, par exemple une gaussienne d'intégrale égale à 1. On considère ensuite

$$n\rho(nx) = \rho_n(x) \ avec \int \rho_n(x) \ dx = 1$$

$$n\rho(nx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \ si \ x = 0 \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

   ρ_n ne converge pas dans $L^1(\mathbb{R})$. Il faut donc donner du sens à la limite de ρ_n. C'est ce qu'on va voir dans la théorie des distributions.

2. Un thermomètre placé dans une pièce mesure la température. La température au point x n'est pas $f(x)$ mais une moyenne de f autour de x :

$$\int f(x+y)\varphi(y) \ dy$$

   avec une certaine fonction φ

Définition 1. Ensemble des fonctions tests
On appelle ensemble des fonctions tests l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty(I)$ à support compact, noté $\mathcal{C}_c^\infty(I) = \mathcal{D}(I)$.

$$\mathcal{D}(I) = \{\mathcal{C} : I \longrightarrow \mathbb{C}, \mathcal{C} \in \mathcal{C}^\infty(I) \ et \ supp(\mathcal{C}) \ compact \ \subset I\}$$

Avec

$$supp(\mathcal{C}) = \overline{\{x \in I, \mathcal{C}(x) \neq 0\}}$$

$$\{x \in \mathbb{R}, \mathcal{C}(x) \neq 0\} =]\alpha, \beta[\setminus \{x_0\}$$

$$\Rightarrow supp(\mathcal{C}) = [\alpha, \beta]$$

Remarque $\mathcal{C} \in \mathcal{D}(I) \Leftrightarrow \exists a, b \in I, supp(\mathcal{C}) \subset [a,b] \subset I$ et $[a,b] \neq I$ est ouvert. Donc en particulier, si $I =]\alpha, \beta[, \mathcal{C} \in \mathcal{D}(I) \Rightarrow \mathcal{C}(\alpha = \mathcal{C}(\beta) = 0$ *

Exemple

$$\mathcal{C}(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & si\ |x| < 1 \\ 0\ sinon \end{cases} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$supp(\mathcal{C}) = [-1, 1]$ *

Définition 2. DISTRIBUTION SUR I, $\mathcal{D}'(I)$
On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(I)$. Il s'agit du dual topologique de $\mathcal{D}(I)$ noté aussi $\mathcal{D}'(I)$.
$T \in \mathcal{D}'(I)$ si et seulement si T est une forme linéaire continue $\mathcal{D}(I) \longrightarrow \mathbb{C}$.

$$T : \mathcal{D}(I) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \longmapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$$

1. *T est linéaire :*
$$\forall \varphi, \varphi_2 \in \mathcal{D}(I), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle T, \lambda\varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle T, \varphi_2 \rangle$$
2. *T est continue.*

$$T \text{ est continue} \Leftrightarrow T \text{ est continue en } \varphi = 0 \text{ (car } T \text{ est linéaire)}$$

$\forall (\varphi_n)$ tel que $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(I)} 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = 0$ où $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(I)} 0$ signifie :

1. $\exists (\alpha, \beta) \in I^2, \forall n, supp(\varphi_n) \subset [\alpha, \beta] = K$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, \underset{n \to +\infty}{lim} ||\varphi_n^{(k)}||_{\infty, K} = \underset{n \to +\infty}{lim} (\max\limits_{n \to +\infty} |\varphi_n^{(k)}(x)|) = 0$

1-a. Distributions régulières

Définition 3. *À toute fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (fonctions intégrables sur tout compact), on peut associer une distribution appelée distribution régulière, qui est définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f\ \varphi = \langle T, \varphi \rangle$$

$T\ in\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (produit de dualité).

Remarque

$$\begin{array}{rcl} L^1(\mathbb{R}) & \subset & L^1_{loc}(\mathbb{R}) \\ L^2(\mathbb{R}) & \subset & L^1_{loc}(\mathbb{R}) \end{array}$$ *

DÉMONSTRATION Montrons que T est une distribution.
T est déjà linéaire et continue. De plus,

$$\varphi_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\ dans\ \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$|T(\varphi_n)| \leq \int_A^B |f|\ |\varphi_n| \leq ||\varphi_n||_\infty\ ||f||_{1,[A,B]}$$

Donc comme $||\varphi_n||_\infty$ tend vers 0 et que $||f||_{1,[A,B]} < +\infty$, alors :

$$\Longrightarrow |T(\varphi_n)| \longrightarrow 0$$

Ainsi, T est une distribution. □

1-b. Exemples

Masse de Dirac en $a \in I$

$$\delta_a : \varphi \longmapsto \varphi(a)$$

$\delta_a \in \mathcal{D}'(I)$ car :

1. δ_a est linéaire
2. δ_a est continue

DÉMONSTRATION Montrons que δ_a est continue. Soit $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(I)} 0$.

$$|\langle \delta_a, \varphi_n \rangle = |\varphi_n(a)| = \begin{cases} 0 \ si \ a \notin K \\ \leq ||\varphi_n||_{\infty,K} \ si \ a \in K \end{cases} \leq ||\varphi_n||_{\infty,K} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ceci car $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(I)} 0$. □

Dérivée de Dirac Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit :

$$\forall \mathcal{C} \in \mathcal{D}(I), \left\langle \delta^{(p)}, \varphi \right\rangle = (-1)^p \varphi^{(p)}(0)$$

Montrons que $\delta^{(p)} \in \mathcal{D}'$.

1. $\delta^{(p)}$ est linéaire sur $\mathcal{D}(I)$ (linéarité de la dérivée p-ième
2. $\delta^{(p)}$ est continue.

DÉMONSTRATION Montrons que $\delta^{(p)}$ est continue. Soit $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(I)} 0$. Alors

$$|\left\langle \delta^{(p)}, \varphi_n \right\rangle| = |\varphi_n^{(p)}(0)| \leq ||\varphi_n^{(p)}||_{\infty,K} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Avec $K \supset supp\mathcal{C}_n$. Ainsi, $\delta^{(p)}$ est continue. □

2. *Convergence des distributions, notion de convergence simple*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 4. *(T_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(I)$ et $T \in \mathcal{D}'(I)$. On dit que $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ quand $n \longrightarrow +\infty$ si $\forall \mathcal{C} \in \mathcal{D}(I), \langle T_n, \varphi \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi \rangle$ (limite dans $\mathbb{C}$)*

Exemple $\forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = e^{inx}$

- $\forall x = 2k\pi, \forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = 1$
- $\forall x \neq 2k\pi$, la suite ne converge pas.

On considère la distribution-fonction associée :

$$T_{u_n} : \mathcal{D}(I) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \longmapsto \langle T_{u_n}, \varphi \rangle = \langle u_n, \varphi \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x) \ dx$$

Remarque u_n est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. ∗

Montrons maintenant que $T_{u_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$:

$$\mathcal{C} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\langle T_{u_n}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{inx}\varphi(x)dx$$

Par une intégration par partie, on obtient :

$$\left[\frac{e^{inx}}{in}\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{inx}}{in}\varphi'(x)dx$$

$\varphi \in \mathcal{D}(I)$, donc $\exists M > 0, supp(\varphi) \subset [-M, M]$ donc $\forall |x| > M, \varphi(x) = 0$. Donc $|\langle T_{u_n}, \varphi\rangle| \leq \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|dx$. $\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|dx < +\infty$ car φ' est continue à support compact. Donc :

$$|\langle T_{u_n}, \varphi\rangle| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$T_{u_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$$

Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R})$, ρ bornée sur $\mathbb{R}$, telle que $\int \rho(x)dx = 1$. (par exemple, $\rho = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n(x) = n\rho(nx)$$

$$T_n = T_{\rho_n}$$

Montrons que $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$ avec $\delta = \delta_0$.

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T_{\rho_n}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} n\rho(nx)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy$$

On a :

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) = \varphi(0)$ car φ est continue.
2. $\left|\rho(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right)\right| \leq ||\varphi||_\infty.|\rho(y)| \in L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse.

D'après le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \rho = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$$

Ainsi, on conclut :

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$$

Théorème 1:
FONDAMENTAL
Soit (T_n) une suite de distributions. On suppose que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \exists \rho_\varphi \in \mathbb{C}, \lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi = \rho_\varphi\rangle$$

Alors

$$T : \varphi \longmapsto \rho_\varphi$$

$$\mathcal{D}(I) \longrightarrow \mathbb{C}$$

est une distribution. C'est à dire elle est linéaire est continue.

DÉMONSTRATION Ce théorème est admis. □

Remarque 1. T est linéaire : évident grâce à la linéarité de la limite.

2. Une suite d'applications continues T_n qui converge simplement ⇒ la limite n'est pas continue ! Ici, T_n sont linéaires. *

Exemple Le peigne de Dirac
Il es défini par :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n,\ \delta_n : \varphi \longmapsto \varphi(n)$$

Montrons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$N \in \mathbb{N}^*, T_N = \sum_{n=-N}^{N} \delta_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Montrons que $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \lim_{N\to+\infty} \langle T_N, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$

$$\langle T_N, \varphi\rangle = \sum_{n=-N}^{N} \langle \delta_n, \varphi\rangle = \sum_{n=-N}^{N} \varphi(n) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=-M}^{M} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) \in \mathbb{C}$$

$supp(\varphi)$ est compact donc $\exists M \in \mathbb{N}, \forall N > M, \varphi(M) = 0$. ($supp(\varphi) \subset [-M, M]$). D'après le théorème fondamental, T_N converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution

$$T : \varphi \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$$

T est notée $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$. *

Exemple

$$\begin{cases} u_n(x) = e^{inx} \\ c_n \in \mathbb{C}, |c_n| \leq (1 + |n|^p) \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Montrons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n T_{u_n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Remarque la série de fonctions $\sum c_n e^{inx}$ ne converge pas au sens classique car le terme général ne tend pas vers 0. Soit $S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n T_{u_n} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle S_N, \varphi\rangle = \sum_{n=-N}^{N} c_n \langle T_{u_n}, \varphi\rangle$$

$$v_n = c_n \langle T_{u_n}, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{rcl} \langle T_{u_n}, \varphi\rangle & = & \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\varphi(x)dx \\ & = & \int e^{inx}\varphi(x)dx \\ IPP & = & \frac{1}{in}\int_{\mathbb{R}} e^{inx}\varphi(x)dx \\ & \vdots & \\ IPP & = & \frac{1}{(in)^{p+2}}\int_{\mathbb{R}} e^{inx}\varphi^{(p+2)}(x)dx \end{array}$$ *

Les termes de bord sont nuls car $supp(\varphi) \subset [-M, M]$. donc

$$v_n \leq |c_n|.\frac{1}{|n|^{p+2}}\int_{\mathbb{R}} |\varphi^{(p+2)}dx| \leq \left(\frac{1 + |n|^p}{|n|^{p+2}}\right) c_\varphi$$

Donc $\sum v_n$ est convergente dans $\mathbb{C}$ donc (δ_N) converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ selon le théorème fondamental vers une distribution

$$S = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n T_{u_n}$$

3. Dérivations des distributions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}'(I)$ l'espace des distributions de I.

***Définition* 5.** *Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. On définit $\dfrac{dT}{dx}$ l'application :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = (-1) \langle T, \varphi' \rangle$$

Propriété 1:
Soit $T \in \mathcal{D}'(I)$. Alors $\dfrac{dT}{dx}$ est une distribution donc appartient à $\mathcal{D}'(I)$.

Démonstration 1. $\dfrac{dT}{dx}$ est linéaire :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(I), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \left\langle \frac{dT}{dx}, (\lambda\varphi_1 + \varphi_2) \right\rangle &= -\langle T, (\lambda\varphi_1 + \varphi_2)' \rangle \\
&= -\langle T, (\lambda\varphi_1' + \varphi_2') \rangle \\
&= -\lambda \langle T, \varphi_1' \rangle - \langle T, \varphi_2' \rangle \\
&= \lambda \left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi_1 \right\rangle + \left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi_2 \right\rangle
\end{aligned}$$

2. $\dfrac{dT}{dx}$ est continue. Soit $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

$$\left| \left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi_n \right\rangle \right| = |\langle T, \varphi_n' \rangle|$$

Or $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \Rightarrow \varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ donc

$$|\langle T, \varphi_n' \rangle| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ceci car T est continue. □

Exemple Cas de $\dfrac{d\delta}{dx}$
$\delta : \varphi \longmapsto \varphi(0)$

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \left\langle \frac{d\delta}{dx}, \varphi \right\rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0) = \left\langle \delta^{(1)}, \varphi \right\rangle$$

Exemple Fonction de Heavyside

$$\begin{cases} 1 \; si \; x \geq 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \left\langle \frac{dT_H}{dx}, \varphi \right\rangle &= -\langle T_H, \varphi' \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} H\varphi' \\
&= -\int_{\mathbb{R}^+} \varphi'(x)dx \\
&= -[\varphi(x)]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{dT_H}{dx}, \varphi \right\rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

donc $\dfrac{dT_H}{dx} = \delta$. *

Exemple Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$T_f : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi$$

Remarque $f, f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *

Montrons que

$$\frac{dT_f}{dx} = T_{f'}$$

.

Démonstration

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \left\langle \frac{dT_f}{dx}, \varphi \right\rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = -[f\varphi]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} f'\varphi = \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

Car φ est à support compact. □

4. Formule des sauts

Théorème 2:
Soit $I =]a_0, a_N[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $a_0 < a_1 < \cdots < a_N$. Soit f tel que :

1. $f \in \mathcal{C}^1(]a_i, a_{i+1}[), \forall i = 0 \dots N-1$
2. $\forall i = 1 \dots N-1$, *f admet en a_i une limite à gauche et une limite à droite.*

On note le saut de f en a_i :

$$\sigma_f(a_i) = \lim_{h \to 0^+} f(a_i + h) - \lim_{h \to 0^+} f(a_i - h)$$

Alors :

$$\frac{dT_f}{dx} = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1} N - 1\sigma_f(a_i)\delta_{a_i}$$

où $\{f'\}$ est la dérivée par morceau de f : $\{f'\}_{/]a_i, a_{i+1}[} = f'_{/]a_i, a_{i+1}[}$

Démonstration $I =]a_0, a_2[, a_0 < a_1 < a_2$.

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), \left\langle \frac{dT_f}{dx}, \varphi \right\rangle &= -\langle T_f, \varphi' \rangle \\
&= -\int_{a_0}^{a_2} f\varphi' \\
&= -\int_{a_0}^{a_1} f\varphi' - \int_{a_1}^{a_2} f\varphi' \\
&= -[f\varphi]_{a_0}^{a_1} + \int_{a_0}^{a_1} f'\varphi - [f\varphi]_{a_1}^{a_2} + \int_{a_1}^{a_2} f'\varphi \\
&= -\varphi(a_1)\left[\lim_{h \to 0^+} f(a_1 - h)\right] + \varphi(a_1)\left[\lim_{h \to 0^+} f(a_1 + h)\right] + \int_{a_0}^{a_2} f'\varphi \\
&= \varphi(a_1)\sigma_f(a_1) + \int_I \{f'\}\varphi
\end{aligned}$$

– $\varphi(a_1) = \langle \delta_{a_1}, \varphi \rangle$

– $\displaystyle\int_I f'\varphi = \langle T_{f'}, \varphi \rangle$

D'où le résultat. □

Exemple Soit $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}$. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ À titre d'exercice :

– Tracer f
– montrer que

$$\frac{dT_f}{dx} = T_{-\frac{1}{1+x^2}} - \pi\delta$$

5. Dérivation d'une suite de $\mathcal{D}'(I)$

Théorème 3:
Soit (T_n) une suite de $\mathcal{D}'(I)$, convergeant vers T dans $\mathcal{D}'$. Alors :

$$\frac{dT_n}{dx} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{dT}{dx}$$

DÉMONSTRATION Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

$$\left\langle \frac{dT_n}{dx}, \varphi \right\rangle = -\langle T_n, \varphi' \rangle$$

$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ donc

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(I), \langle T_n, \psi \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T, \psi \rangle$$

Remarque $\varphi \in \mathcal{D}(I) \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}(I)$ *

Donc

$$\langle T_n, \varphi' \rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi' \rangle$$

Donc

$$\left\langle \frac{dT_n}{dx}, \varphi \right\rangle \longrightarrow -\langle T, \varphi' \rangle = \left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi' \right\rangle$$

Corollaire 1:
Si $\sum T_n$ converge dans $\mathcal{D}'(I)$, alors

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_n T_n\right) = \sum_n \frac{dT_n}{dx}$$

On peut dériver terme à terme une série qui converge dans $\mathcal{D}'$